# Derivadas de orden mayor a uno.

En clase hemos analizado a detalle la existencia e interpretación de las derivadas parciales de primer orden, pero la mayoría de las veces la función resultante suele ser diferenciable y nada impide que se puedan determinar segundas derivadas parciales, por ejemplo en una función escalar que depende de dos variables, digamos $f(x,y)$ se puede definir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{xy}$$

Este proceso puede continuar para cualquier orden de derivación por ejemplo se entiende

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^2 y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = f_{yyx}.$$

Por ejemplo si $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, se sigue que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y + 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$$

and

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$$

Se acostumbra llamar orden de derivación al número de veces que se deriva en total, por ejemplo $f_{xyy}$ tiene orden 3 al igual que $f_{yyy}$ Como hemos mencionado ya, la continuidad de las derivadas parciales implica la diferenciabilidad, de modo que, por ejemplo a orden 2, la continuidad de $f_{yy}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$ implican la diferenciabilidad de $f_y(x,y)$, mientras que la continuidad de $f_{xx}(x,y)$ y $f_{yx}(x,y)$ implican la diferenciabilidad de $f_x(x,y)$.

**Definición 1.** *Diremos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase $C^l$ en el abierto $A$ (brevemente $C^l(A)$) si todas las derivadas parciales de orden $l$ son continuas es $A$.*

Note que dado que diferenciabilidad implica continuidad concluimos que si $f \in C^l(A)$, entonces $f \in C^{l-1}(A)$ en otras palabras TODAS sus derivadas de orden $l-1$ son continuas, aplicando de manera iterativa concluimos que $f \in C^1(A)$ *i.e.* las parciales de orden uno son continuas lo que a su vez implica que la función $f$ es continua ($f \in C^0(A)$).

Esto puede verse en el ejemplo de la función $f(x,y)$, ya que si $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$ y $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$son continuas entonces $\frac{\partial f}{\partial x}$ es diferenciable y ello implica que es continua. Un argumento analogo con $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ y $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$ implican la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$. Es decir tanto $f_x$ como $f_y$ son continuas, esto a su ves implican la diferenciabilidad de $f$ que a ves implica la continuidad de $f$.

El siguiente resultado muestra que las derivadas cruzadas son iguales siempre y cuando sean continuas, es decir el orden de derivación es irrelevante cuando se tiene la continuidad de las parciales.

**Teorema 1.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que las derivadas cruzadas $f_{x_i x_j}$ y $f_{x_j x_i}$ son continuas en el abierto $A$, entonces $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ en todo el conjunto $A$.*

*Demostración.* La prueba se realizará asumiendo que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pues el caso general se sigue fácilmente. Considere $(x,y) \in A$ y $h,k$ suficientemente pequeños tal que los cuatro puntos $(x,y)$, $(x+h,y)$, $(x,y+k)$ y $(x+h,y+k)$ siguen perteneciendo a $A$ y defina el termino

$$A := f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y).$$

Ahora llame $\phi(x) := f(x, y+k) - f(x, y)$ observe que $A = \phi(x+h) - \phi(x)$ Por el teorema del valor medio de cálculo 1 tenemos que existe $c$ en el intervalo formado por $x$ y $x+h$ tal que

$$A = \phi'(c)h = h\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x, y+k) - f(x, y)\right)\Big|_{x=c} = h(f_x(c, y+k) - f_x(c, y))$$

Observe que es posible volver a aplicar el teorema del valor medio pero ahora en la variable y, es decir, existe $d$ en el intervalo formado por $y$ y $y+k$ tal que

$$A = h(f_x(c, y+k) - f_x(c, y)) = hkf_{yx}(c, d).$$

Si ahora llamamos $\psi(y) := f(x+h, y) - f(x, y)$ tendremos que $A = \psi(y+k) - \psi(y)$, aplicando el mismo procedimiento que antes podemos concluir que existen $c'$ en el intervalo formado por $x$ y $x+h$ y $d'$ en el intervalo formado por $y$ y $y+k$ tal que $A = hkf_{xy}(c', d')$. De modo que

$$f_{xy}(c', d') = f_{yx}(c, d)$$

Si tomamos el límite $(h, k) \to (0, 0)$ sabemos que tanto $c$ y $c'$ convergen a $x$ como $d$ y $d'$ convergen a $y$ por ser puntos intermedios. Este hecho y la continuidad de las derivadas cruzadas implican

$$f_{xy}(x, y) = f_{xy}\left(\lim_{(h,k)\to(0,0)}(c', d')\right) = f_{yx}\left(\lim_{(h,k)\to(0,0)}(c, d)\right) = f_{yx}(x, y)$$

$\square$

Notemos que tambien podemos tomar derivadas parciales de orden mayor a uno en otros sistemas de coordenadas como polares (n=2), esféricas o cilíndricas (n=3), de hecho nosotros vimos la clase del viernes que usando la regla de la cadena en una función $f(x, y)$ donde $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

y con ello

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{pues } r \text{ y } \theta \text{ son independientes} \\
&= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{usamos la expresion de } \frac{\partial}{\partial r} \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

De manera analoga se pueden obtener expresiones para $f_{\theta\theta}$ y $f_{r\theta}$.

TAREA: si $g(r, \theta)$ y $T(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1} y/x)$. Si $h(x, y) := g(T(x, y))$, calcule usando la regla de la cadena la expresion $h_{xx} + h_{yy}$. Pruebe que si $g(r, \theta) = \log r$, entonces $g_{xx} + g_{yy} = 0$ siempre que $(x, y) \neq (0, 0)$.

Como ya hemos discutido antes el concepto de diferencial esta relacionado con el cambio local del función $f$ respecto a sus entradas. En particular para funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ decimos que el cambio a primer orden entre la función $f(x+v)$ y $f(x)$ esta dado por

$$df = v_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = v^T \cdot \nabla_x f$$

donde $\nabla_x$ indica que derivo sobre las entradas del vector $x$ y las entradas del vector $v$ se consideran como constantes Es decir, el operador diferencial $d$ podemos definirlo como $d = v^T \cdot \nabla$ y si $f$ es dos veces diferenciable podemos definir

$$\begin{aligned}
d^2 f :=& d(df) \\
=& (v^T \cdot \nabla)(v^T \cdot \nabla f) \\
=& \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \left( v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \\
=& \sum_{i=1}^{n} v_1 v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_2 v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_i} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} v_n v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_i}
\end{aligned}$$

En el caso particular de dos variable tenemos que $d^2 f = v_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 v_1 v_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ Lo importante por resaltar es que si $df$ mide el cambio lineal de $f$ respecto al cambio de cada entrada, entonces $d^2 f$ mide el cambio lineal del cambio lineal de $f$, es decir los cambios de orden cuadráticos en $f$.

Al ser $f$ diferenciable $f(x+v) = f(x) + v^T \cdot \nabla f + R(v)$. Con al observación anterior es natural pensar que $d^2 f$ y $R(v)$ pueden estar relacionados. Al igual que se definió $d^2 f$, puede definirse $k-$ésimo diferencial de una función f, es decir

$$d^k f = (v^T \cdot \nabla) \cdots (v^T \cdot \nabla) f$$